Dieter Holtmann

Nachtrag zu LISREL

1) Zur Minimierungsfunktion von Jöreskog

Um die Maximum Likelihood Methode anzuwenden, betrachtet man die Verteilungsdichte der Kovarianzmatrix $S = \frac{1}{N-1} (Z' Z - N\bar{Z}\bar{Z}')$, diese Verteilung ist für unabhängige normalverteilte (nämlich nach N (μ, Σ) verteilte) Zufallsvariablen Z die Wishart-Verteilung. Bei meiner Berechnung der Log-Likelihoodfunktion aufgrund der Wishart-Dichte, die ich bei Anderson (1958,154) übernommen hatte, übersah ich, daß dort die Abkürzung n: = N-1 verwendet wird. Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \ell n\ L\ (\Sigma) &= - \frac{n}{2}\ \ell n\ |\Sigma| - \frac{N-1}{2}\ \mathrm{Spur}\ (S\ \Sigma^{-1}) + \mathrm{constans} \\ &= - \frac{n}{2}\ (\ell n\ |\Sigma| + \mathrm{Spur}\ (S\ \Sigma^{-1})\ ) + \mathrm{constans} \end{aligned}$$

Somit ist Jöreskogs Minimierungsfunktion entgegen meiner Vermutung richtig.

2) Zur standardisierten Lösung von Jöreskog

Ich hatte darauf hingewiesen, daß die Standardisierung der abhängigen latenten Konstrukte eine nachträgliche Standardisierung ist, so daß nicht garantiert ist, daß man dadurch das Maximum der Likelihood-Funktion unter den Nebenbedingungen $\sigma_{\eta i}=1$

* Vgl. Dieter Holtmann, Multivariate Modellbildung für metrische Daten, in: Analyse & Kritik 1/83, S. 37-82

Analyse & Kritik 6 (1984), S. 212–215.

erhält. Dies folgt zwar nicht automatisch, aber es ist im Lisrel-Ansatz doch der Fall:

Alle Konstrukte ξ lassen sich auch als künstliche abhängige theoretische Konstrukte behandeln:

Meßmodell:	$y = \Lambda_y\eta + \varepsilon$	
	$x = \Lambda_x\xi + \sigma$	
Strukturmodell:	$B\eta = \Gamma\xi + \zeta$	(B_{IV})
Neues Meßmodell:	$\binom{y}{x} = \Lambda \binom{\eta}{\xi} + \binom{\varepsilon}{\sigma}$	
Neues Strukturmodell ohne unabhängige latente Konstrukte:	$K^{-1} \binom{\eta}{\xi} = \binom{\zeta}{\xi}$	

Also gebe es o.B.d.A. keine unabhängigen latenten Konstrukte ξ. Dadurch vereinfacht sich der Ansatz zu:

$$y = \Lambda_y\eta + \varepsilon$$
$$\eta = B_\eta + \zeta \qquad (B_V)$$

Es sei nun die ML-Lösung bestimmt. Die nachträgliche Standardisierung der η läßt sich dann beschreiben als:

$$\tilde{\eta} = T\eta \quad , \text{ wobei: } T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{\eta_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_{\eta_m}} \end{pmatrix}$$

Für Λ_y erhält man:

$$y = \Lambda_y\eta + \varepsilon = \Lambda_y\, T^{-1}\tilde{\eta} + \varepsilon$$

Also: $\tilde{\Lambda}_y = \Lambda_y T^{-1}$

Für B erhält man:

$$\tilde{\eta} = T\eta = TB\eta + T\zeta = TBT^{-1}\tilde{\eta} + T\zeta$$

Also: $\tilde{B} = TBT^{-1}$

Für ψ erhält man:

Kovarianzmatrix von $T\zeta$: $T\psi T'$
Also: $\tilde{\Psi} = T\Psi T'$ (wobei $T' = T$)

Zur Bestimmung der ML-Lösung wird die Funktion F (Σ) in Abhängigkeit von Σ minimiert:

$$F(\Sigma) = \ln|\Sigma| + \text{Spur}(S\Sigma^{-1}) + \text{constans}$$

Es gilt: $\Sigma = \Lambda_y \; (I - B)^{-1}\psi \; (I-B')^{-1}\Lambda_y' + \Theta_\varepsilon$

$= \tilde{\Lambda}_y T \; (I-B)^{-1}T^{-1}\tilde{\psi} \;\; T^{-1}(I-B')^{-1}T\tilde{\Lambda}_y' + \Theta_\varepsilon$

Ferner: $T\,(I-B)^{-1}\,T^{-1} = (I-\tilde{B})^{-1}$

(Denn: (Linke Seite) $\cdot$ $(I-\tilde{B}) = I$)

Also wird Σ beim Übergang zur Standardisierung der η nicht verändert. Das Minimum von F ist gleich dem Minimum von F unter den Nebenbedingungen $\sigma_{\eta i} = 1$.

(Θ_ε wird von der Standardisierung der η_i gar nicht tangiert.)

3) Nicht-rekursive Effekte in LISREL

Ich hatte darauf hingewiesen, daß die nicht-rekursiven Effekte in LISREL nur richtig berechnet werden, wenn: $\lim_{i\to\infty} B^i = 0$
Inzwischen wurde gezeigt (Bentler/Freeman 1983), daß Jöreskogs Bedingung (größter Eigenwert von BB' kleiner 1) nicht dazu äquivalent ist, sondern nur die Bedingung: größter Eigenwert von B kleiner 1

4) Zum Modelltest von LISREL

In LISREL wird die Nullhypothese, das Modell treffe zu, mit Hilfe des Likelihood Ratio Tests untersucht.

$$-2 \ln \frac{\max_{\Omega_0} L}{\max_{\Omega} L} = -2 \ln \frac{L\,(\Sigma(\hat{\Theta}))}{L\,(S)}$$

$$= -2\,(\ln L\,(\Sigma(\hat{\Theta})) - \ln L\,(S)\,)$$

$$= -2\,(\frac{-n}{2})\,(\ln|\Sigma(\hat{\Theta})| + \text{Spur}\,(S\Sigma^{-1}(\hat{\Theta})\,) - \ln|S| - (p+q)\,)$$

Jöreskog (1981, I.28) gibt seine Minimierungsfunktion an als:

$F = \ln |\Sigma| + \text{Spur } (S\Sigma^{-1}) - \ln |S| - (p + q)$

Dementsprechend formuliert Jöreskog (1981, I.38) als Zusammenhang, daß der Testwert gleich n mal dem Minimum der "fitting function" ist. Wie mein Diplomand Frank Lettau in seiner Diplomarbeit bemerkte, ist dies jedoch in dem Output von LISREL nicht der Fall.

Zahlen aus einem Beispiel von mir:

Minimalwert der fitting function: .3225889; N = 179.

$(N-1)\ F_o = 57{,}420824$

Als χ^2-Wert ausgedruckt: 113,84 (d.h. das Doppelte). Da nach den Beispielen der Testwert richtig zu sein scheint, hat Jöreskog wohl tatsächlich als Minimierungsfunktion programmiert:

$\frac{1}{2}\ (\ \ln |\Sigma| + \text{Spur } (S\Sigma^{-1}) - \ln |S| - (p + q)\ )$

5) Bentler (1983) plädiert für die Generalized Least Squares (GLS)-Schätzung, weil sie asymptotisch verteilungsfrei ist, realisiert wird dies in seinem Programm EQS. Es werden aber nach wie vor stetige Variablen unterstellt, die Verallgemeinerung besteht nur darin, daß mehr als die ersten beiden Momente, die im Fall der Normalverteilung hinreichende Information sind, berücksichtigt werden können. Dann läßt sich die Normalverteilungs-Annahme nach meiner Ansicht aber vertreten als die Approximation durch Modelle, die nur die ersten beiden Momente berücksichtigen. Die Behandlung von nominalen Variablen erfordert dagegen weiterhin Programme wie NONMET und GLIM. (Die Berücksichtigung von Momenten höherer Ordnung bei Bentler ist eher programmatisch, bisher läßt sich in EQS zusätzlich nur ein für alle Variablen einheitlicher Wölbungsparameter modellieren.)

Bibliographie

Anderson, T. W. (1958), An introduction to multivariate statistical analysis, New York

Bentler, P.M. (1983), Some contributions to efficient statistics in structural models: specification and estimation of moment structures, Psychometrika 48, S. 493-517

Bentler, P.M./E.H. Freeman (1983), Test for stability in linear structural equation systems, Psychometrika 48, S. 143-145

Jöreskog, K.G./D. Sörbom (1981), LISREL V. Uppsala